YTU FEN EDEBİYAT FAKULTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

MODÜL VE MODÜL ÇEŞİTLERİ

YUNUS YILDIRIM 18025031

Danışman: DOÇ. DR. GÜRSEL YEŞİLOT

ÖZET

Bu tez çalışması, modül ve modül çeşitlerini okuyucuya daha anlaşılır bir şekilde aktarabilmek amacıyla gerekli tanımlamaları içermektedir. Özellikle teorem ve önerme yoğunluğundan kaçınılarak, tanımların daha net ve açık bir şekilde anlaşılması için doğrudan örnekler kullanılmıştır. Bu tezde, modül ve modül çeşitleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bu kavramların pratikte nasıl kullanıldığı örneklerle incelenmiştir. Böylece, okuyuculara tezin konusuna ilişkin derin bir anlayış kazandırılmıştır.

MODÜL TANIMI VE ÖRNEKLERİ

Tanım : R değişmeli bir halka ve M değişmeli bir grup olsun.

$$\cdot : \boldsymbol{R} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

Şeklinde tanımlanmış fonksiyon var ve aşağıdaki özellikler sağlıyorsa M değişmeli grubuna "$\cdot$" fonksiyonu ile R üzerinde modül veya kısaca $R-$ modül denir.

1. Her $r \in R$ ve $m, m' \in$ M için $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$;

2. Her $r, r' \in R$ ve $m \in$ M için $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$;

3. Her $r, r' \in R$ ve $m \in$ M için $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m)$;

4. Her $m \in M$ ve $1_R \in R$ için $1_R \cdot m = m$;

Örnek : R bir halka olsun. R Değişmeli halkası $R-$ modüldür.

Örnek: G bir değişmeli grubu aşağıda tanımlı fonksiyon ile beraber bir $\mathbb{Z}-$ modüldür.

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$$

$$n \cdot g = \begin{cases} g + g + \cdots + g \quad (n\, defa) & , n > 0 \\ 0_G & , n = 0 \\ (-g) + (-g) + \cdots + (-g) \; (n\, defa) & , n < 0 \end{cases}$$

ALT MODÜL TANIMI VE ÖRNEKLERİ

Tanım: M değişmeli grubu R halkası üzerinde bir modül ve G, M grubunun alt kümesi olsun. Eğer G kendi içinde M 'nin işlemleri ile bir $R-$modül oluyorsa G ye M 'nin alt modülü veya M 'nin bir $R-$alt modülüdür denir.

Örnek: R değişmeli halkası bir R-modül ve Ida R'nin bir ideali olsun. I ,R 'nin bir R-altmodülüdür.

Örnek: M bir R-modül ve x∈M olsun. Rx={rx:r∈R} kümesi M'nin bir R-alt modülüdür.

DEVİRLİ ALT MODÜL TANIMI VE ÖRNEKLERİ

Tanım: M bir $R-$modül olsun. $x \in M$ için,

$$(x) = \{r \cdot x : r \in R\,,\}$$

Şeklinde tanımlanan kümeye x elemanı ile üretilen devirli $R-$alt modül denir.

Örnek: $(\mathbb{Z}_6, +)$ değişmeli grubu

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$$
$$(n, \overline{m}) \longrightarrow n \cdot \overline{m} = \overline{nm}$$

Şeklinde tanımlı fonksiyonla beraber bir $\mathbb{Z}-$ modüldür. Ayrıca $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt grubu olan $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın bir devirli $\mathbb{Z}-$alt modüldür.

Örnek: Her R halkası kendi üzerinde bir devirli $R-$modüldür.

SERBEST MODÜL TANIMI VE ÖRNEKLERİ

Tanım: M bir $R-$modül olsun. M'nin $R-$bağımsız bir üreteç kümesi var ise M bir serbest $R-$modüldür ve bu kümeye R'nin bazı veya tabanı denir.

Örnek: Her R değişmeli halkası kendi üzerinde bir serbest modüldür.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ değişmeli grubu aşağıdaki şekilde tanımlı fonksiyonla beraber $\mathbb{R}$ değişmeli halkası üzerinde bir modüldür ve ayrıca $\mathbb{R}^3$ bir serbest $\mathbb{R}-$modüldür.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\big(n, (x_1, y_1, z_1)\big) \longmapsto n \cdot (x_1, y_1, z_1) = n(x_1, y_1, z_1) = (nx_1, ny_1, nz_1)$$

PROJEKTİF MODÜL VE ÖRNEKLERİ

Tanım: M bir $R-$modül olsun. Eğer M modülü için aşağıda verilen teoremin şartlarından en az birisi sağlanıyor ise M ye projektif $R-$modül denir.

Teorem: M, N ve P $R-$modül olsunlar. Bu $R-$modüller için aşağıdaki önermeler birbirine denktirler.

1- $$M \xrightarrow{f} P \to 0$$

Şeklinde verilmiş bir $R-$modül epimorfizması için $f\alpha = 1_p$ olacak şekilde bir $\alpha : P \to M$, $R-$modül homomorfizması vardır.

2- P modülü bir F serbest $R-$modülünde direkt toplamın terimidir.

3- Verilen her $M \xrightarrow{g} N \to 0$ $R-$modül epimorfizması ve $h : P \to N$, $R-$modül homomorfizması için öyle bir $\tilde{h} : P \to M$ $R-$modül homomorfizması vardır ki $g\tilde{h} = h$ olur.

Örnek: Her vektör uzayı bir projektif modüldür.

İNJEKTİF MODÜL VE ÖRNEKLERİ

Tanım: R bir halka olsun. Aşağıdaki teoremin şartlarından birini sağlayan $R-$modülüne injektif modül denir

Teorem: R bir halka ve E bir $R-$modül olsun.

1. Her $0 \to E \xrightarrow{f} L$, $R-$monomorfizması için $\alpha f = 1_E$ olacak biçimde bir $\alpha : L \to E$, $R-$homomorfizmi vardır.
2. Her $0 \to M \xrightarrow{g} N$, $R-$monomorfizmi ve her $h : M \to E$ $R-$homomorfizmi için $h = \tilde{h}g$ olacak biçimde bir $\tilde{h} : N \to E$, $R-$homomorfizmi vardır.

Örnek: Bir cisim üzerinde modül yapısına sahip olan vektör uzayları injektiftir.

ÇARPIMSAL MODÜL VE ÖRNEKLERİ

Tanım: M bir $R-$modül ve ve I, R halkasının bir ideali olsun. Her N alt modülü $N = IM$ şeklinde ifade edilebiliyorsa M ye çarpımsal modül denir.

Örnek: Çarpımsal idealler çarpımsal modüldürler.

Örnek: Her $R-$ halkası kendi üzerinde bir çarpımsal modüldür. Çünkü R halkasının her I ideali $I = IR$ biçiminde yazılabilir.

ASALIMSI ALT MODÜL VE ÖRNEKLERİ

Tanım: N, M'nin aşikar olmayan bir $R-$alt modülü olsun. Eğer $r, s \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$, $m \notin N$ olması bir n pozitif tamsayısı için $r^n \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye asalımsı alt modül denir.

Örnek: R bir halka olsun. R halkasının her asal ideali bir $R-$ asalımsı alt modüldür.

Örnek: $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}[x]$ olmak üzere $N = (2\mathbb{Z})[x]$ olsun. Bu durumda $(N : M) = 2\mathbb{Z}$ olur ve N alt modülü, M de asalımsı $R-$alt modül olur.

ASAL ALT MODÜL VE ÖRNEKLERİ

Tanım: N, M nin aşikar olmayan bir $R-$alt modülü olsun. Eğer her $r \in R, m \in M$ için $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N : M)$ ifadelerini gerektiriyorsa N ye asal M nin $R-$asal alt modülü denir.

Örnek: R halkasının her asal ideali R nin bir $R-$asal alt modülüdür.

Örnek: $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin asal $\mathbb{Z}-$ alt modülüdür fakat $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin asal $\mathbb{Z}-$ alt modülü değildir.

SONUÇ

Bu tez çalışması, modül tanımları ve teoremler üzerinde yapılan analizlerle önemli çıkarımlar elde edilmiştir. Elde edilen çıkarımlar, genel örneklerden yola çıkarak özel örnekler oluşturmayı mümkün kılmıştır. Bu özel örnekler sayesinde, daha önce öğrenilmiş olan vektör uzayı ve benzeri kavramların genel yapılarına daha derin bir şekilde hakim olunmuştur. Ayrıca, çalışmanın sonuçları, matematiksel teorem ve modül tanımlarının pratiğe uygulanabilirliğini göstermiştir. Bu çalışma, vektör uzayı ve benzeri kavramlara ilişkin daha genel bir anlayışın elde edilmesini sağlamıştır. Örneklerin incelenmesiyle, bu kavramların nasıl farklı durumlarda kullanılabileceği ve nasıl genelleştirilebileceği daha iyi anlaşılmıştır. Aynı zamanda, çalışma matematiksel düşünce sürecini geliştirmek ve matematiksel bilgilerin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlamak amacıyla önemli bir katkı sunmuştur. Sonuç olarak, bu tez çalışması, modül tanımları ve teoremler üzerinde yapılan çıkarımların matematiksel bilginin güçlendirilmesinde önemli bir rol oynamıştır

KAYNAKÇA

1. [London Mathematical Society student texts 51] Rodney Y. Sharp - Steps in commutative algebra (2000, Cambridge University Press) - libgen.lc
2. Anderson F. W. and Fuller K. R., 1992: Rings and categories of modules, SpringerVerlag, New-York.
3. Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M. and Zhou Y., 2014: Simple-direct-injective modules, J. Algebra vol. 420, 39-53
4. ÇALLIALP, F. ve TEKİN, Ü. , 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. Birsen Yayınevi, İstanbul